

TRANSFERENCIA DE MATERIA EN SISTEMAS BINARIOS CERRADOS. PARTE II.

J. ZOREC

Instituto de Astronomía y Física del Espacio
Buenos Aires

Con este trabajo se desea introducir un modelo sencillo de las formaciones circumestelares en una de las componentes de un sistema binario cerrado. Del mismo se pretende obtener información acerca de la estructura de las capas más profundas de las envolturas, formadas con el material de transferencia proveniente de la compañera en evolución.

Se convino en denominar "emisora" a la estrella que durante su evolución cede parte del gas de sus capas externas y respectivamente "receptora" a su compañera.

En el análisis previo (Parte I) se concluyó que en los casos de haber formaciones coplanares al plano orbital del sistema binario, el fluido de transferencia puede adquirir características supersónicas. Las aceleraciones a las que se halla sometido este fluido, se deben esencialmente a la existencia de un potencial efectivo, cinético y gravitatorio, que depende de las características dinámicas del sistema binario. Por otro lado, la distribución misma del gas transferido y el módulo de las velocidades dependen de las propiedades efectivas del cuerpo emisor y del balance del gradiente de presiones con el potencial del sistema en la superficie o región que podría denominarse emisora. Esto indica, que la estrella receptora puede interpretarse como objeto de prueba, que se interpone al flujo del material de transferencia, especialmente cuando se desea analizar su comportamiento en una zona reducida de su extensión. Dadas las propiedades que caracterizan la superficie del cuerpo receptor, existe un juego complicado de condiciones de contorno para el gas incidente. En primera aproximación y obviando con ella la propagación de ulteriores perturbaciones hacia el interior de la estrella receptora, es natural exigir, que a una cierta profundidad de las capas superficiales de la misma, se anule la velocidad total del material transferido, como consecuencia de la acción de la viscosidad y presión

de una zona con densidad y radiación en aumento. Como consecuencia de la transición de un comportamiento supersónico a subsónico, aparecerá una discontinuidad que puede interpretarse en términos de un frente de choque. La región en la que se desea desarrollar el formalismo, es reducida frente a la extensión de la superficie total de incidencia y se caracteriza por un máximo en el flujo. Esto hace que se pueda adoptar por razones de simetría y sencillez, un frente de discontinuidad esférico y concéntrico con la esfera de la estrella central.

Las condiciones de contorno del fluido en la superficie de incidencia, sugieren una serie de simplificaciones en las ecuaciones del problema, que lo permiten tratar aproximadamente como "fluido de contorno". Si bien nada indica por adelantado que el frente de choque deba producirse dentro de la extensión del fluido de contorno (donde la presión del mismo parece constante según la dirección radial), se lo adopta como suposición, dada la notable sencillez con la que en este caso se pueden tratar las ecuaciones.

El frente de choque separa del fluido supersónico incidente una capa subsónica, la cual contempla la posibilidad de anular las velocidades en un cierto punto. Este hecho sumado a la baja aceleración gravitatoria a la que es sometido el gas en la superficie de una estrella normal, comparándola con el orden de magnitud de las velocidades de incidencia que en estos problemas entran en juego ($\sim 10^8$ cm/seg), constituyen las razones de tener una zona con presión casi constante. Lógicamente estas razones hacen que el modelo que aquí se desea desarrollar, no podrá ser aplicado al caso de tener como estrella central una enana blanca u otro objeto más denso, sabiendo que en estos casos es importante la acción de los campos magnéticos y que aquí no se han tenido en cuenta.

Se acepta que en el dominio de validez de las ecuaciones diferenciales, el fluido es laminar, se comporta como gas perfecto y está constituido por H y He.

Con el propósito de evitar el cálculo en detalle del control radiativo de la estrella central, pues se desea tener sólo una estimación aproximada, se admite que el material lindante con la superficie estelar esté en equilibrio térmico con el gas de la capa externa de la estrella y se toma como único proceso de recalentamiento, el debido a la presencia de una onda de choque. Se desprecian los efectos de la radiación proveniente de la masa gaseosa detrás del frente de choque en la elevación de la temperatura de la superficie de la estrella, de manera que se tenga una condición dinámica de contorno bien definida.

Si bien se trata aquí de resolver un caso de flúidos de contorno, el modelo acarrea consigo la dificultad consistente en que experimentalmente se ha determinado que la turbulencia supersónica está íntimamente relacionada con los flúidos de contorno, es decir, que la suposición de tener un flúido laminar es válida sólo en la zona donde se recobra el carácter subsónico del mismo, Landau (1959). Por otro lado se dice, que el flúido es laminar si el número de Reynold es inferior a un cierto valor crítico (por encima del cual será turbulento) y que depende del caso particular que se trate. De todas maneras, las teorías de estabilidad de flúidos, no se han expedido definitivamente en la fijación de los valores críticos de los números de Reynold, Landau (1959), Pao (1967), aunque subsiste la posibilidad de tener flúidos laminares cuando las densidades son muy bajas, como es el caso que nos ocupa. Se puede acotar, que en los problemas de transferencia de materia en sistemas cerrados, los números de Reynold son del orden de 10^5 a 10^8 . Este hecho se asocia, entre otras cosas, con viscosidades muy bajas, lo que hará que la disipación de la energía mecánica en térmica, sea un efecto prácticamente despreciable en la mayor parte de la extensión del flúido a ser analizado.

Es necesario hacer destacar, que los sistemas binarios pueden tener componentes que rotan o no sincrónicamente con la rotación del sistema. La sincronicidad tiene especial importancia, en nuestro caso, para decidir la naturaleza de las condiciones de contorno que encuentra el material transferido en la superficie de la receptora (nos desentendemos aquí de los mecanismos de eyección de masa que también dependen fuertemente de estos últimos efectos, Kruszewski (1963, 1964)).

Una componente de la binaria que no rota sincrónicamente, queda sujeta a la acción de un juego de fuerzas centrífugas, que hacen aparecer sobre su estructura un límite de estabilidad. Si el objeto sobrepasa por sus dimensiones ese límite crítico y se trata en particular del caso de la estrella receptora, la fijación de los contornos apropiados no está exenta de serias dificultades. Por ello, es necesario discutir los casos en los cuales estas complicaciones puedan ser obviadas. Esto implica, buscar las condiciones para las cuales se puede tener una receptora girando sincrónicamente.

Teóricamente, Zahn (1966, a, b, c), ha demostrado que la escala de tiempo de sincronización es diferente si se posee una estrella con envolturas convectivas o radiativas aceptando que el mecanismo de sincronización lo

proveen las fricciones por efectos de marea. En el caso de tener estrellas con envolturas radiativas, la escala de tiempo para lograr el sincronismo es mayor que la escala nuclear de evolución. Para las estrellas con envolturas convectivas tal escala de tiempo es inferior a la escala Kelvin de evolución. De ésto se desprende, que una componente receptora que ha logrado un cierto margen de estabilidad en su estructura, posee una envoltura convectiva.

En los objetos con envolturas convectivas aparecen nuevas dificultades en la fijación de las condiciones de frontera. Se debe en estos casos, a los mecanismos de recalentamiento de envolturas por transferencia de la energía mecánica de convección mediante ondas de choque, como sucede en el caso de la corona solar, Lighthill (1967).

Sin embargo en un trabajo reciente, Levato (1973), se ha demostrado con material de observación, que el sincronismo en las binarias resulta ser un hecho bastante común, por lo menos en las binarias eclipsantes. No es precisamente el caso que nos ocupa, pero del mismo trabajo se desprende, que los efectos de marea son insuficientes para explicar el sincronismo observado. Se aduce a un fenómeno de pre-secuencia el logro del estado de sincronismo. Obviamente las conclusiones antes aquí expuestas parecen ser de por sí no definitivas, con lo cual subsiste la posibilidad de encontrar una componente sin complicaciones de estabilidad en su estructura y con envolturas radiativas, para la cual sea aplicable el modelo aquí a desarrollar con condiciones de contorno simples.

De lo expuesto se desprende, que en los casos que se puedan obviar los efectos de inestabilidad superficial y efectos de convección en las envolturas, se puede fijar como parámetro una cierta temperatura a la superficie de la receptora que esté de acuerdo con su tipo espectral, de la que participarán además las capas más internas de las formaciones circumstelares, por habérselas supuesto en equilibrio térmico con la superficie estelar.

Como se mencionó anteriormente se trata el fluido sólo en las cercanías del punto de flujo máximo, al que se interpreta como la "mancha caliente" de la binaria e identifica con el así denominado "punto de estancamiento". Para simplificar se adopta incidencia normal y uniforme.

La descripción que aquí se realiza es válida para los casos que observen un estado estacionario y presenten aproximadamente simetría cilíndrica. En los casos de haber formaciones circumstelares estables, éstas presentan una notable concentración hacia el plano de la órbita, tal como

se demuestra en la Parte I de este trabajo. De acuerdo con estas configuraciones, se adopta un sistema de coordenadas cilíndricas de manera que el origen del ángulo azimutal coincida con la dirección del punto de estancamiento.

El régimen de fluido de contorno simplifica notablemente las ecuaciones diferenciales del problema. Estas, asimismo, permiten ser tratadas mediante un procesamiento similar al de resolución de ecuaciones por separación de variables. Esto se lleva a cabo con cantidades cuya elección es sugerida por las condiciones de contorno en el frente de choque, de manera que las mismas se satisfagan con exactitud. Finalmente se procede a una reducción a ecuaciones de primer orden en términos de funciones, que permitan, por un lado representar con sencillez los parámetros del fluido y por otro, obtener soluciones analíticas de suficiente precisión, que decidan las condiciones en las zonas más próximas a la superficie estelar.

Como se ha indicado, el propósito esencial de este trabajo, es iniciar un estudio de la estructura de las envolturas de una de las componentes de un sistema binario cerrado, basado exclusivamente en la fijación de las posibles restricciones que delimitan el comportamiento del material de transferencia.

Ecuaciones de movimiento

Las ecuaciones que rigen el movimiento de un fluido compresible en las condiciones antes mencionadas para un régimen estacionario son:

$$\bar{\nabla} \cdot (\rho \bar{v}) = 0 \quad (1)$$

$$\rho (\bar{v} \cdot \bar{\nabla}) \bar{v} = \nabla \cdot \mathbb{T} + \rho \bar{F} \quad (2)$$

$$\rho (\bar{v} \cdot \bar{\nabla}) u = \bar{\nabla} \cdot (\mathbb{T} \cdot \bar{v}) - \bar{v} \cdot (\bar{\nabla} \cdot \mathbb{T}) - \epsilon \rho - \bar{\nabla} \cdot (\kappa \bar{\nabla} t) \quad (3)$$

En este sistema de ecuaciones la (1) es la ecuación de continuidad, la (2) es la ecuación de los momentos y la (3) representa la conservación de la energía.

Los símbolos empleados aquí, representan: \bar{v} vector de velocidad; ρ densidad del fluido; t temperatura; u energía interna específica; \mathbb{T} representa al tensor de tensiones que incluye la acción de las fuerzas viscosas superficiales; κ es el coeficiente de conducción térmica; ϵ es el coeficiente másico de emisión total del gas y \bar{F} representa al resto de las fuerzas externas que actúan sobre el fluido.

Para el tensor de tensiones tenemos:

$$\underline{\underline{\sigma}} = -PI + \chi(\bar{\nabla} \cdot \bar{\nabla})I + 2\mu\Delta \quad (4)$$

donde $\chi = \lambda + 2/3 \mu$, siendo λ el coeficiente de viscosidad de volumen, μ el coeficiente de viscosidad de superficie y P la presión. Por tratarse de un fluido monoatómico se cumple que $\lambda = 0$. En la expresión (4), I representa al tensor identidad y Δ es el tensor de deformación:

$$\Delta = \frac{1}{2} [\bar{\nabla}\bar{\nabla} + (\bar{\nabla}\bar{\nabla})^t] - \frac{1}{3} I (\bar{\nabla} \cdot \bar{\nabla}) \quad (5)$$

siendo $(\bar{\nabla}\bar{\nabla})^t$ la diada conjugada traspuesta de $\bar{\nabla}\bar{\nabla}$ cuya representación está dada por:

$$\bar{\nabla} = \sum_j \bar{e}_j^v v_j$$

$$\bar{\nabla} = \sum_k \bar{e}_k^v \frac{\partial}{\partial x_k}$$

$$\bar{\nabla}\bar{\nabla} = \sum_{j,k} \bar{e}_k^v \bar{e}_j^v \frac{\partial v_j}{\partial x_k}$$

en las que los \bar{e}_i^v representan a los versores de los ejes coordenados.

Con estas expresiones se obtiene inmediatamente la expresión vectorial de las fuerzas de superficie por unidad de volumen fácil de manejar en las subsiguientes transformaciones a coordenadas curvilíneas:

$$\begin{aligned} \bar{\nabla} \cdot \underline{\underline{\sigma}} = & -\bar{\nabla}P + \frac{4}{3} \bar{\nabla}(\mu \bar{\nabla}\bar{\nabla}) + \bar{\nabla}(\bar{\nabla} \cdot \bar{\nabla}\mu) - \\ & - \bar{\nabla}\bar{\nabla}\mu^2 + \bar{\nabla}\mu \wedge (\bar{\nabla} \wedge \bar{\nabla}) - (\bar{\nabla} \cdot \bar{\nabla})\bar{\nabla}\mu - \bar{\nabla} \wedge (\bar{\nabla} \wedge \mu \bar{\nabla}) \quad (6) \end{aligned}$$

Las ecuaciones (1), (2) y (3) se describen en un sistema de coordenadas centrado en la estrella receptora.

Para el término que representa a las fuerzas externas se tendrá:

$$\bar{F} = \bar{\nabla}\Omega + 2\bar{\nabla}\wedge\bar{\omega} \quad (7)$$

donde Ω representa al potencial efectivo (cinético y gravitatorio) de un sistema binario constituido por dos masas puntuales separada a una distancia A . El segundo término del segundo miembro de (7) representa a la fuerza de Coreolis.

El potencial de las fuerzas externas conservativas, en el sistema de coordenadas centrado en la estrella receptora está dado por:

$$\Omega = G \frac{M_1}{r} + G \frac{M_2}{r_2} + \frac{\omega^2}{2} \left[(r \cos \theta - Aq)^2 + r^2 \sin^2 \theta \right] \quad (8)$$

donde: $q = \frac{M_2}{M_1 + M_2}$ $r_2^2 = r^2 + A^2 - 2rA \cos \theta$

$$\omega^2 = \frac{G}{A^3} (M_1 + M_2) \quad (9)$$

Las cantidades r y θ utilizadas en (8) y (9) son coordenadas del sistema cilíndrico mencionado en el párrafo introductorio. Pueden visualizarse en la figura I.

Los primeros dos términos del segundo miembro de la ecuación de la energía pueden ser transformados para su uso más cómodo con la expresión (5) de la siguiente manera:

$$\bar{\nabla} \cdot (\bar{\nabla} \cdot \Pi) - \bar{\nabla} \cdot (\Pi \cdot \bar{\nabla}) = P \bar{\nabla} \cdot \bar{\nabla} - \mu \phi \quad (10)$$

siendo entonces la función disipativa:

$$\phi = 2 \Delta : \Delta + \frac{2}{3} (\bar{\nabla} \cdot \bar{\nabla})^2 \quad (11)$$

donde el símbolo $\Delta : \Delta$ representa el doble producto de diadas de Gibbs.

Por tratarse de un gas casi completamente ionizado, el coeficiente de conductividad térmica estará dado por, Spitzer (1962):

$$k = 1.96 \times 10^{-4} \frac{T^{5/2}}{Z \ln \Lambda} \left[\frac{\text{erg}}{\text{seg. cm.}^\circ \text{K}} \right] \quad (12)$$

mientras que para el coeficiente de viscosidad vale la expresión:

$$\mu = 2.21 \times 10^{-15} \frac{T^{5/2} \cdot A_i^{1/2}}{Z^4 \ln \Lambda} \left[\frac{\text{gm}}{\text{cm. seg.}} \right] \quad (13)$$

Tanto la (12) como la (13) valen sólo para el caso en el que no haya campos magnéticos. Por tratarse de una mezcla de gas de H y He, se podrá estimar los valores de (12) y (13) con un valor medio para el número atómico Z y el peso atómico A_i . Los valores de Λ pueden interpolarse en

las tablas correspondientes, Spitzer (1962).

En el sistema de ecuaciones de (1) á (3) se ha introducido una primera simplificación. Esta consiste en no tener en cuenta en la expresión de la energía interna del gas, el aporte de la energía de radiación del medio. Esto significa que tampoco será necesario considerar los efectos de la presión de radiación. Lógicamente que en las condiciones normales del problema, en el que las densidades oscilan entre 10^{-6} y 10^{-12} gm/cm³, las simplificaciones adoptadas sólo tendrán sentido en las zonas donde la temperatura no excede un valor del orden de 10^5 k°, lo cual identifica únicamente a las capas más internas de una estructura gaseosa circumestelar. Sin embargo, la densidad en la periferia del anillo e incluso en las proximidades del frente de choque cae notablemente, asegurando con ello la imposibilidad de adoptar una representación de cuerpo negro en las contribuciones radiativas, que fue la considerada para el cálculo de las estimaciones anteriores. Para evitar este inconveniente, las ecuaciones adoptadas se hacen extensibles a toda la zona comprendida entre la superficie estelar y el frente de choque, con la salvedad de que en las proximidades de éste, las marchas de la densidad y la temperatura calculadas tendrán esencialmente un valor estimativo, característica que ya les es propia en el caso que el frente de la discontinuidad se forme fuera de la región que se comporta como fluido de contorno.

Como la energía cinética (térmica) de las partículas cargadas, es en promedio, en las condiciones de nuestro problema, mucho mayor que la energía de interacción de las mismas, podemos adoptar la aproximación de un gas ideal. Atendiendo a estas consideraciones, la ecuación de estado de nuestro fluido será:

$$P = \frac{R}{S} \rho \cdot T \quad (14)$$

siendo R la constante universal de los gases y S el peso molecular medio del gas.

Para el caso de un gas perfecto, la energía interna específica es función sólo de la temperatura:

$$u = C_v \cdot T \quad (15)$$

donde C_v es el calor específico a volúmen constante.

Finalmente, para facilitar la solución de las ecuaciones, es conveniente, acorde con el modelo que aquí se desea desarrollar, que la ecuación de la energía (3) esté expresada en términos del coeficiente del calor espe-

cífico a presión constante. Utilizando la ecuación de continuidad (1), la ecuación de estado (14) y las expresiones (10) y (15) obtenemos:

$$\rho C_p \bar{v} \cdot \bar{\nabla} T = \bar{v} \cdot \bar{\nabla} P - \epsilon \rho + \mu \phi - \bar{\nabla} (k \bar{\nabla} T) \quad (16)$$

En la ecuación (16) el término que representa la disipación de energía térmica por radiación estará determinado esencialmente por transiciones de tipo libre-libre y ligado-libre de los átomos de H y He. Se tomara como despreciable la contribución de las transiciones ligadas. Dado el extenso rango de temperaturas, que cabe esperar en la zona ubicada entre la superficie estelar y el frente de choque y de las condiciones dinámicas de contorno que se impondrán se infiere que preponderarán las transiciones libre-libre de ambos elementos en las capas externas, mientras que en las zonas profundas tendrán importancia las transiciones ligado-libre del H.

Dadas las transiciones antes mencionadas, es posible adoptar por razones de sencillez una representación potencial de la temperatura y de la densidad del coeficiente máxico de emisión de energía de la siguiente manera:

$$\epsilon = \epsilon_0 \rho^{1-\beta} T^\nu \quad (17)$$

Condiciones de contorno

El sistema constituido por las ecuaciones de (1) á (3), juntamente con las expresiones (7), (9), (10) y (17); las representaciones de los coeficientes de viscosidad y conductividad térmica para un gas ionizado y la ecuación de estado (14), describirá el estado de la materia de transferencia en una zona limitada por la estrella receptora y el frente de choque, si las variables que intervienen en la descripción del problema, satisfacen adecuadamente las condiciones de contorno dinámicas y cinemáticas para ambos extremos de la integración, que se imponen siguiendo los delineamientos descriptos en la introducción.

En el frente de choque se exigirá que las variables cumplan con las condiciones impuestas por la discontinuidad. Si se trata de un caso como el nuestro, en el que el número de Mach es $M_0 \gg 1$, las condiciones en una discontinuidad fuerte para una sola onda oblicua son:

$$\frac{\rho_1}{\rho_0} = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \quad (18)$$

$$v_{r_1} = - \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right) V_0 \cos \theta \quad (19)$$

$$v_{\theta_1} = V_0 \sin \theta \quad (20)$$

$$\frac{P_1}{P_0} = \frac{2\gamma}{\gamma + 1} M_0^2 \cos^2 \theta \quad (21)$$

$$\frac{T_1}{T_0} = \frac{2\gamma(\gamma - 1)}{(\gamma + 1)^2} M_0^2 \quad (22)$$

En estas expresiones el subíndice 0 (cero) indica el valor de los parámetros delante del frente de choque y el subíndice 1 sus valores detrás de la discontinuidad. V_0 es la velocidad de incidencia del fluido en el límite de la discontinuidad, considerada además uniforme y γ es la relación de los calores específicos: $\gamma = C_p/C_v$. $M_0 = V_0/V_s$ representa el número de Mach, siendo V_s la velocidad del sonido en el medio antes del frente de choque.

Las condiciones de (18) á (22) están escritas en coordenadas cilíndricas, sin prestar atención a la coordenada z , pues se ha desentendido del movimiento del fluido en esa dirección. Estas coordenadas serán utilizadas para explicitar el sistema original de ecuaciones diferenciales escritas hasta el momento en forma vectorial.

El otro extremo de la integración, depende esencialmente de la densidad y la temperatura del gas en la superficie estelar, pues se exigirá que la presión del fluido incidente se iguale a la presión superficial de la estrella, constituyéndose ésta en una condición dinámica de borde:

$$P = P_* \quad (23)$$

el asterisco indica que se trata de la superficie de la estrella.

Habiéndose establecido un régimen estacionario, es natural exigir que la componente normal de velocidad del fluido sea igual a la velocidad radial de las capas superficiales de la estrella donde se cumple (23). Si éstas permanecen en reposo, tendremos:

$$v_n = \bar{V} \cdot \bar{n} = 0 \quad (24)$$

siendo el versor normal a la superficie de incidencia.

Dado que en el punto donde se cumple (23) se produce un aumento considerable de la densidad y una disminución apreciable de la temperatura del material transferido, los efectos de la viscosidad recobran importancia. Esto último implica, que al irnos aproximando al punto caracterizado por (23), se debe anular la componente tangencial de velocidades:

$$\overline{V}_{||} = 0 \quad (25)$$

Transformación de las ecuaciones

Escritas las ecuaciones en coordenadas cilíndricas, se pueden obviar, como primera simplificación, las variaciones de los parámetros en la coordenada z . Dados los órdenes de magnitud extremos que entran en juego en las cantidades V_0 , ρ , T y r , es suficiente efectuar una estimación de las ecuaciones, manteniendo en las mismas sólo términos del orden de $1/r$.

Como se adoptó un frente de choque concéntrico con la esfera estelar, la zona del análisis tiene un espesor casi constante δ . Las zonas que generalmente comprenden los flujos de contorno son pequeñas, es decir cabe esperar que $\delta \ll 1$.

Las condiciones cinemáticas de contorno (24) y (25) imponen en el problema una relación de órdenes de magnitud en las cantidades v_r y v_θ que puede ser expresada de la siguiente manera:

$$\frac{v_r}{v_\theta} = O(\delta)$$

Esta relación se cumplirá tanto mejor cuanto más apartados estemos del frente de choque, es decir que se verificará:

$$v_r \ll v_\theta$$

lo cual sugiere que podamos desprestigiar una cantidad apreciable de términos en las ecuaciones diferenciales.

Teniendo en cuenta todas estas consideraciones hasta aquí presentadas, las ecuaciones simplificadas adquieren el siguiente aspecto:

$$\frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (\rho v_r \cdot r) + \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta \rho) \right] = 0 \quad (26)$$

$$v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + v_\theta \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = - \frac{1}{r\rho} \cdot \frac{\partial P}{\partial \theta} + f(r) \sin \theta + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\mu \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right) \quad (27)$$

$$\frac{\partial P}{\partial r} = 0 \quad (28)$$

$$\rho C_p \left(v_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) - \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} = - \rho E + \mu \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right)^2 - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r k \frac{\partial T}{\partial r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(k \cdot \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) \quad (29)$$

Si bien el coeficiente de conductividad térmica no es pequeño, al irnos aproximando a la superficie estelar la caída de temperatura hará menos efectiva la ionización, en estas condiciones se irá aproximando al valor:

$$k \sim \rho C_p \bar{v} \ell$$

siendo \bar{v} una velocidad térmica promedio de los núcleos atómicos y ℓ el camino libre medio de los mismos. Como se puede notar inmediatamente, su valor es inferior al que se obtiene con la (12). La doble derivación con respecto a r introduce un factor del orden de $1/r$ inferior en relación a los demás términos. Estos últimos argumentos justifican que se pueda despreciar en (29) al primero de los términos que representan al flujo de energía por conducción térmica. Igual suerte corre el término que representa a la disipación de la energía mecánica por efectos de la viscosidad. Esto se funda en el hecho de tener, también aquí, un orden de magnitud $1/r$ más pequeño que el resto de los términos significativos, además de los valores extremadamente bajos del coeficiente de viscosidad μ , aunque su valor sea algo superior al dado por la expresión (13) en la superficie de la estrella, donde se lo puede estimar con:

$$\mu \sim \rho \bar{v} \ell$$

Como es de notar por la ecuación (28), el problema se reduce a un caso particular de "fluidos de contorno". La extensión de tales zonas es, como se dijo, muy reducida, lo cual justifica hacer la aproximación:

$$r \sim 0,$$

Las ecuaciones (26) á (29) se transforman en las siguientes expresiones:

$$\frac{\partial}{\partial r} (a_1 \rho v_r) + \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho v_\theta) = 0 \quad (30)$$

$$v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{a_1} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = - \frac{1}{\rho a_1} \frac{\partial P}{\partial \theta} + f(a_1) \sin \theta \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial r} &= 0 \\ \rho c_p \left(v_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v_\theta}{a_1} \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) - \frac{v_\theta}{a_1} \frac{\partial P}{\partial \theta} &= - \rho \epsilon - \\ &- \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left(k \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (33)$$

donde: $f(a_1) = \frac{GM_2}{A^2} \left[1 - \left(\frac{A}{A-a_1} \right)^3 \right]$

siendo M_2 la masa de la estrella emisora de material de transferencia.

Las variables que se tienen en cuenta en estas ecuaciones diferenciales pueden visualizarse en la Figura 1.

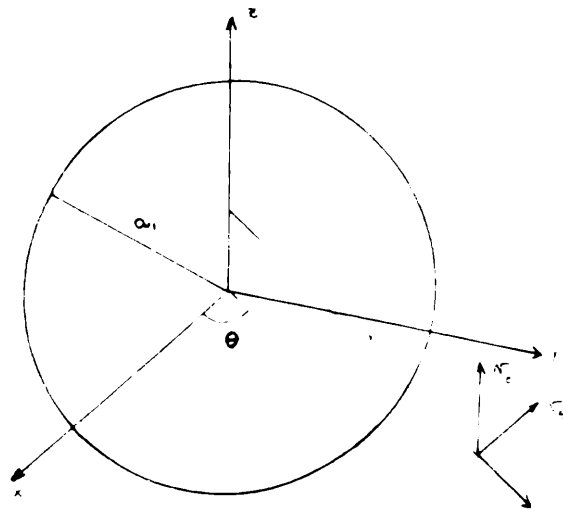


FIG. 1

Solución de las ecuaciones

Se ve inmediatamente, que el sistema anterior de (30) a (33) puede simplificarse aún más si se lo trata de resolver con un nuevo sistema de variables que son sugeridas por las condiciones de contorno en el frente de choque:

$$\begin{aligned}v_r &= -v(r) \cos \theta \\v_\theta &= u(r) \sin \theta \\P &= P(r) \cos^2 \theta\end{aligned}\quad (34)$$

$$\rho = \rho(r) \quad T = T(r)$$

Semejantes definiciones ya fueron utilizadas anteriormente por Homann (1936), Lighthill (1957) y Herring (1960).

En conjunto de ecuaciones de (30) a (33) se puede reducir a un sistema de dos ecuaciones diferenciales introduciendo la función de flujo $\psi(r, \theta)$. Esta se definirá de la siguiente manera:

$$\rho v_r a_1 = -\rho_1 \frac{\partial \psi}{\partial \theta}(r, \theta) \quad (35)$$

$$\rho v_\theta = \rho_1 \frac{\partial \psi}{\partial r}(r, \theta) \quad (36)$$

Se ve que la definición de $\psi(r, \theta)$ se sigue de manera que satisfaga la ecuación de continuidad (30).

Con (28), (29) y (30) podemos formar la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \cdot \tan \theta - \frac{v(r) a_1}{u(r)} \frac{\partial \psi}{\partial r}(r, \theta) = 0$$

la cual, mediante el sistema de resolución por variables separables arroja la solución:

$$\psi(r, \theta) = \Psi(r) \sin^k \theta$$

Comparando con (35) y (36) se obtiene $k=1$, de donde

$$\psi(r, \theta) = \Psi(r) \sin \theta \quad (37)$$

Antes de transformar las ecuaciones (31) y (33) conviene observar que como la presión es constante según r en la zona del fluido de contorno, tal como lo especifica la ecuación (32) su valor puede estar estimado en cualquiera de los extremos de la integración. De hecho podemos adoptar el valor que resulta inmediatamente detrás de frente de choque. De la última relación en (34) obtenemos:

$$\frac{\partial P}{\partial \theta} = -P(r) 2 \cos \theta \operatorname{sen} \theta$$

Con los argumentos aquí expuestos y utilizando (21), esto se transforma en:

$$\frac{\partial P}{\partial \theta} = -P_0 \cdot \frac{2\gamma}{\gamma+1} M_0^2 \cos \theta \operatorname{sen} \theta$$

Introduciendo los valores de M_0 y haciendo uso de (18) se obtiene:

$$\frac{\partial P}{\partial \theta} = -\frac{4(\gamma-1)}{(\gamma+1)^2} V_0^2 \rho_1 \operatorname{sen} \theta \cos \theta \quad (38)$$

$$D = \frac{4(\gamma-1)}{(\gamma+1)^2} V_0^2$$

Utilizando las definiciones (35), (36) y la expresión (38) las ecuaciones (31) y (33) pasan a ser:

$$\begin{aligned} -v(r) \frac{d[u(r)]}{dr} \cos \theta \operatorname{sen} \theta + \frac{u^2(r)}{a_1} \cos \theta \operatorname{sen} \theta = \\ = \frac{DP_1}{\rho a_1} \operatorname{sen} \theta + f(a_1) \operatorname{sen} \theta \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \rho c_p \left(-v(r) \frac{\partial T}{\partial r} \cos \theta + \frac{u(r)}{a_1} \frac{\partial T}{\partial \theta} \operatorname{sen} \theta \right) + \\ + u(r) \frac{DP_1}{a_1} \operatorname{sen}^2 \theta = -\rho e - \frac{1}{a_1} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(k \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (40)$$

Si consideramos que la "mancha caliente se identifica con el punto de estancamiento del fluido incidente en la estrella receptora y la tomamos ubicada en $\theta=0$, sabiendo además que por (34) se tiene:

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{\partial P}{\partial \theta} = 0$$

las (39) y (40) se reducen a:

$$-\kappa(r) \frac{d[u(r)]}{dr} + \frac{u^2(r)}{a_1} = \frac{D}{a_1} \frac{\rho_1}{\rho} + f(a_1) \quad (41)$$

$$-\rho C_p \kappa(r) \frac{dT}{dr} = -\rho \epsilon \quad (42)$$

Conviene tener expresadas estas relaciones en términos de variables adimensionales; con este propósito se definen:

$$\begin{aligned} r &= a_1 x \\ \psi(r) &= a_1 V_0 \zeta(x) \end{aligned} \quad (43)$$

De (32) y la ecuación de estado (14) se establece:

$$\frac{T}{T_1} = \frac{\rho_1}{\rho} = \eta(x) \quad (44)$$

De esta manera las ecuaciones que describen el estado de la materia en las proximidades del punto de estancamiento son:

$$\eta(x) \zeta(x) \frac{d}{dx} \left(\eta(x) \frac{d \zeta(x)}{dx} \right) + \eta^2(x) \left(\frac{d \zeta(x)}{dx} \right)^2 = \frac{D}{V_0^2} \eta(x) + w \quad (45)$$

$$\eta(x) \zeta(x) \frac{d \eta(x)}{dx} = \epsilon_1 \quad (46)$$

siendo:

$$\begin{aligned} \frac{D}{V_0^2} &= \frac{4(r-1)}{(r+1)^2} \\ w &= \frac{f(a_1) a_1}{V_0^2} & \epsilon_1 &= \epsilon \frac{a_1}{C_p V_0 T_1} = \epsilon_1 [\eta(x)] \end{aligned}$$

Para proceder a la solución analítica e incluso para facilitar el cálculo numérico, es conveniente reducir el conjunto (45), (46) a un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden. La sustitución natural que sugiere la ecuación (45) consiste en definir una nueva variable $\xi(x)$, tal que:

$$\xi(x) = \eta(x) \frac{d\zeta(x)}{dx}$$

obtenemos con este reemplazo el siguiente sistema:

$$\frac{d\eta}{dx} = \frac{\epsilon_1 [\eta(x)]}{\eta(x) \cdot \zeta(x)} \quad (47)$$

$$\frac{d\zeta(x)}{dx} = \frac{\xi(x)}{\eta(x)} \quad (48)$$

$$\frac{d\xi(x)}{dx} = - \frac{\xi^2(x)}{\eta(x) \cdot \zeta(x)} + \frac{D}{V_0^2} \frac{1}{\zeta(x)} + \frac{W}{\eta(x) \zeta(x)} \quad (49)$$

En términos de las variables que están escritas las ecuaciones (47) á (49), las condiciones de contorno se reducen a las siguientes expresiones; para $r \geq a_1$:

$$\eta = \frac{T_0}{T_1} = \frac{(r+1)^2}{2r(r-1)} M_0^{-2}$$

$$\zeta = 0 \quad (50)$$

$$\xi = 0$$

para $x=x_1$, siendo x_1 la posición del frente de choque:

$$\eta = 1$$

$$\zeta = \frac{r-1}{r+1}$$

$$\xi = 1 \quad (51)$$

Acorde con el hecho de tener un gas monoatómico y despreciando los efectos de la radiación e ionización del medio, el valor de γ será $5/3$.

En el caso de (50), no se puede asegurar que todas las condiciones de contorno se cumplan simultáneamente en $x=x_1$, sino que sólo representan tendencias a las que deben ajustarse las cantidades ζ , ξ y μ para que representen soluciones del modelo que se plantea. Tal cosa no ocurre en el caso de $x=x_1$, pues las (51) deben verificarse por la misma definición de las variables con las cuales se tiene expresadas las ecuaciones diferenciales del problema.

De haberse resuelto el sistema (47) á (49) con las condiciones de borde (50) y (51), las cantidades definidas en (34) estarán representadas por:

$$\begin{aligned} \frac{v(r)}{v_0} &= \eta(x) \cdot \zeta(x) \\ \frac{u(r)}{v_0} &= \xi(x) \\ \frac{T(r)}{T_1} &= \frac{\rho_1}{\rho(r)} = \eta(x) \end{aligned} \quad (52)$$

Con el propósito de obtener soluciones analíticas, se puede despreciar el término en ξ^2 de la ecuación (49). Dentro de los márgenes posibles de los valores de η para los cuales el modelo es aplicable, el término despreciado no introduce errores mayores que el 20% en la estimación de $d\xi/dx$. El máximo del error se produce en $x=x_1$, mientras que en $x=1$, las ecuaciones son prácticamente insensibles a la simplificación efectuada.

Utilizando a η como variable independiente, se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{d\zeta}{d\eta} &= \frac{\zeta \xi \eta^{1-\nu-\beta}}{\varepsilon^0} \\ \frac{d\xi}{d\eta} &= \frac{D}{v_0^2 \varepsilon^0} \eta^{2-\nu-\beta} + \frac{W}{\varepsilon^0} \eta^{1-\nu-\beta} \end{aligned} \quad (53)$$

Las soluciones que obedecen las condiciones de contorno en el frente de choque son:

$$\xi = 1 + \frac{D}{v_0^2 \varepsilon^0 (3-\nu-\beta)} (\eta^{3-\nu-\beta} - 1) + \frac{W}{\varepsilon^0 (2-\nu-\beta)} (\eta^{2-\nu-\beta} - 1) \quad (54)$$

$$\zeta = \left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right) \exp \left\{ \frac{A}{2-\nu-\beta} (\eta^{2-\nu-\beta} - 1) + \frac{a}{(\gamma-2\nu-2\beta)} (\eta^{\gamma-2\nu-2\beta} - 1) + \frac{b}{(4-2\nu-2\beta)} (\eta^{4-2\nu-2\beta} - 1) \right\} \quad (55)$$

$$A = \frac{1}{\varepsilon^0} \left[1 - \frac{D}{v_0^2 \varepsilon^0 (3-\nu-\beta)} - \frac{W}{\varepsilon^0 (2-\nu-\beta)} \right]$$

$$a = \frac{D}{v_0^2 \varepsilon^0 (3-\nu-\beta)}$$

$$b = \frac{W}{\varepsilon^0 (2-\nu-\beta)}$$

$$\varepsilon_1(\eta) = \varepsilon^0 \eta^{\nu+\beta-1}$$

Con ésto se ve que existen soluciones capaces de satisfacer las condiciones de frontera en el frente de choque simultáneamente, o sea en el punto $x=x_1$. Sin embargo eso no implica que se cumplan con simultaneidad los requerimientos dados en (50) para el punto $x=1$. En $x=1$ tendremos según (54) y (55)

$$\xi(\eta_0) = \xi_0 \neq 0$$

$$\zeta(\eta_0) = \zeta_0 \neq 0$$

y por lo general $\xi_0 \neq \zeta_0$.

Esto muestra que las condiciones de frontera en la superficie estelar deben ser redefinidas, en el sentido de exigir que las velocidades (componente tangencial y normal) tiendan a anularse en puntos que no necesariamente deban ser los mismos. Tal cosa se cumplirá si:

Como es probable que la zona tratada (δ) sea pequeña comparada con la dimensión de la estrella, en una integración numérica no se pierde precisión (viendo además que se ha hecho $r=a_1$), si se comienza a integrar en el frente de choque hacia valores decrecientes de x . El proceso numérico se da por concluido una vez que la relación $\mu\zeta/\xi^{-\delta}$ deja de tener validez, o sea, mas allá de ξ_{-} . Sin embargo, se presenta el inconveniente de que en esas condiciones, habiéndose fijado previamente un valor de W , la integración nos fija un contorno determinado para los valores de ρ y T en el punto ξ_{-} , lo cual significa tener una única solución posible para cada valor de W que se elija. Para evitar esta dificultad se estudia en un próximo trabajo la posibilidad de efectuar una transformación de las variables que intervienen en (47) á (49) de modo que las ecuaciones se mantengan invariantes, pero que se pueda de esa manera extender el rango de soluciones posibles. Es obvio que si se desea integrar en el sentido de las x crecientes, las soluciones aproximadas para un entorno del punto para el cual ξ_{-} , arrojan valores adecuados para un M inicial. Sin embargo se deberá efectuar toda una integración completa, que al fin sólo obedece a un único juego inicial de parámetros.

Si se deseara mantener una estructura estable de gas en torno de la estrella receptora, que en particular puede ser un anillo circumestelar, es necesario que $\xi > 0$, lo cual fija las condiciones iniciales del problema. Se observa que si éstas determinan un valor $\xi < 0$, el fenómeno puede ser interpretado como absorción del flujo incidente por parte de la estrella receptora. Cualitativamente se puede concluir que será reconocible una estructura circumestelar en tanto se tenga una componente tangencial positiva de velocidades, $\xi > 0$.

El planteo aquí efectuado será utilizado en futuros trabajos para concluir el análisis con soluciones numéricas y para obtener alguna conclusión acerca del estado de ionización de la masa transferida próxima a la superficie de la estrella receptora, analizando más en detalle el proceso de disipación de energía térmica por radiación.

Referencias

- Herring, T.K. 1960, J. Fluid Mech. 7, 257.
Homann, F. 1936, Z. Angew. Math. Mech. 16, 153.
Kruszewski, A. 1963, Acta Astr. 13, 106.
Kruszewski, A. 1964, Acta Astr. 14, 231.
Landau, L.D. y Lifshitz, E.M. 1959. Fluid Mechanics, Pergamon Press
Lighthill, M.J. 1957, J. Fluid Mech. 2,1.
Lighthill, M.J. 1967, I.A.U. Symposium n°28, 429. Academic Press.
Pao, R.H.F. 1967, Fluid Dynamics, Charles E. Merrill Books, Inc.
Spitzer, L. Jr. 1962, Physics of Fully Ionized Gases, John Wiley & Sons, Inc.
Zahn, J.P. 1966a, Ann.Astrophys. 29, 313.
Zahn, J.P. 1966b, Ann.Astrophys. 29, 489.
Zahn, J.P. 1966c, Ann.Astrophys. 29, 565.